УДК 519.00.00

В.В. Новиков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ВЫЧИСЛЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Классический метод расчета неопределенности измерений(метод ISO GUM) подразумевает некоторые существенные упрощения и допущения, которые приходится вводить, из-за чего может возникать риск некорректно вычисленой оценки неопределенности измерения. Как вариант решения задачи предлагается использовать только численные методы оценивания неопределенности измерений, которые позволят избежать подобных рисков и субъективных оценок законов распределения.

Ключевые слова: неопределенность измерения, метод Монте-Карло, численные методы

Как было показано в [1] для некоторых моделей измерений результаты оценивания неопределенности по ISO GUM[2] и численными методами отличаются. В данной работе предлагается рассмотреть численный алгоритм оценивания неопределенности на двух типовых примерах и обосновать возможность полного отказа от классического метода расчета по ISO GUM, как менее корректного.

Алгоритм моделирования случайных величин и метод Монте-Карло являются общеизвестным и описан в [3,4]. Некоторые основные шаги данного алгоритма применительно к задаче оценивания неопределенности измерений приведены на рис.1

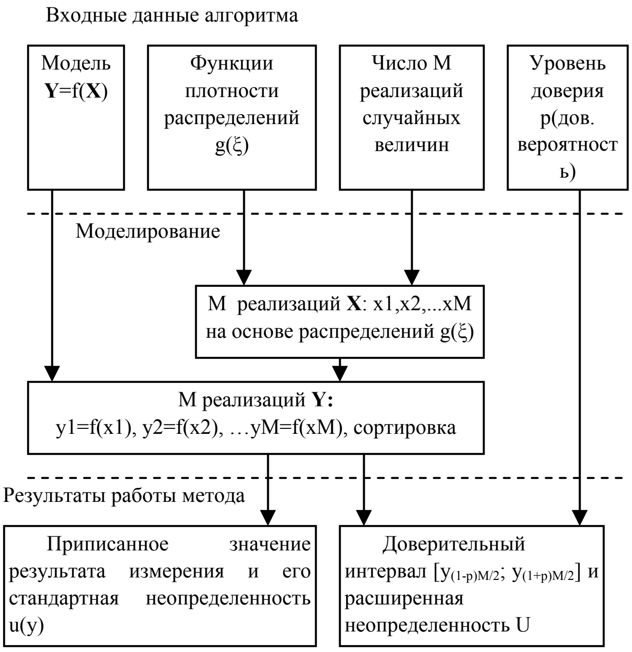

Рис.1. Диаграмма работы метода

Опишем алгоритм:

1) Согласно заданных функий плотности распределений входных величин g(ξ) генерируется M реализаций наборов входных величин. Для этого используются стандартные генераторы псевдослучайных чисел с периодом гораздо больше M.
2) Используя математическую модель измерения **Y**=f(**X**) вычисляется M значений $y_1,...y_M$
3) Приписанное значение результата измерения – среднее арифметическое набора $y_1,...y_M$, стандартная неопределенность – оценка стандартного отклонения.
4) Отсортировать полченные $y_1,...y_M$ по возразстанию. Доверительные интервал с уровнем доверия p: $[y_{(1-p)M/2};\ y_{(1+p)M/2}]$, соответсвенно расширенная неопределенность U вычислятся из этого интервала. Например, для p=095: $[y_{0.025*M};\ y_{0.975*M}]$

Рассмотрим предложеный алгоритм на примере S9 из EA 4/02[5] Калибровка переносного цифрового мультиметра на 100 В постоянного тока.

Математическая модель измерения:

$$E_X = V_{iX} - V_S + \delta V_{iX} - \delta V_S \quad (1)$$

Все источники неопределенности детально описаны в [5], приведем только функции распределений каждого:

V_{iX} -константа: 100,1 V;

V_S -нормальное распределение, центр 0 V, стандартное отклонение 0.001 V;

δV_{iX} -равномерное распределение, центр 0 V, полуширина – 0.05 V

δV_S - равномерное распределение, центр 0 V, полуширина – 0.011 V

Результат, вычисленный в [5]: u(E_X)=0.03, U(E_X)=0.05 V, исходя из равномерного закона распределения E_X, p=95%.

Применяя метод Монте Карло и следуя алгоритму на рис.1 моделируем 10^6 реализаций E_X, отсортированные значения и построенная гистограмма изображены на рис.2.

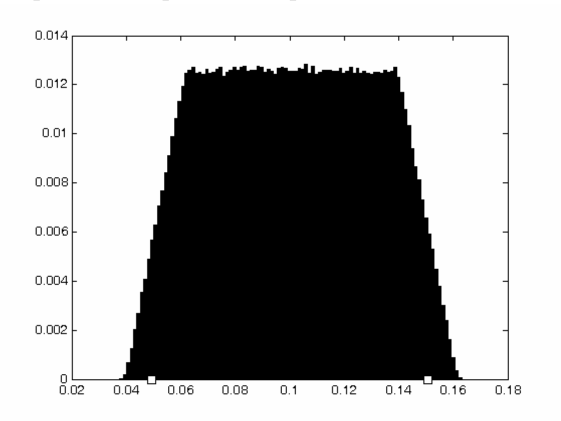

Рис.2. Гистограмма распределения E_X

Как наглядно видно из гистограммы на рис.2 закон распределения E_X трапецеподобный. На рис 3. изображен график смоделированной функции распределения E_X. Квадратами на рис.3 и рис.4 обозначен 95% доверительный интервал.

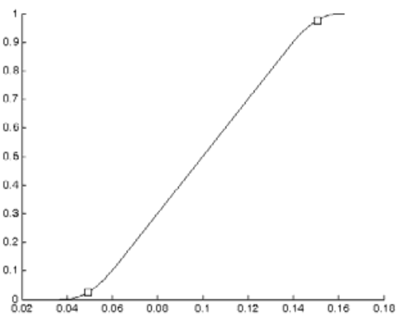

Рис.3. График функции распределения

Доверительный интервал для p=95%: [$y_{0.025*M}$; $y_{0.975*M}$]=[0.0494; 0.1505], U=0.0505 V, для данного примера количество зкачущих цифр после запятой равно двум, округляя получим U=0.05 V.

Сравнивая результаты с [5] можем сделать следующий вывод: несмотря на то, что закон распределения E_X трапецеподобный, а не треугольный, результаты вычисления расширенной неопределенности для p=95% совпадают до значущих цифр.

А что если результат оценивания расширенной неопределенности калибровки мультиметра будет потом использоватся как источник неопределенности в других измерениях?(а будет наверняка). Будет допускатся неверный закон распределения, что может в дальнейшем привести к рискам неверного вычисления неопределенностей. А что если бы необходимо было вычислить расширенную неопределенность с более высоким уровнем доверия? Например, для p=99%, или p=99.73%.

Используем подход ISO GUM: $U_{0.99}$=k*u=1.715*0.03=0,05145≈0.05V, $U_{0.9973}$=k*u=1.727*0.03=0,05181≈0.05V, предполагая равномерный закон распределения E_X.

Вычисляя по методу Монте-Карло, получаем: $U_{0.99}$= 0.0564≈0.06 V, $U_{0.9973}$= 0.0588≈0.06 V. Для таких высоких уровней доверия мы получаем существенную разницу в результатах именно по причине ложного предположения о равномерном законе распределения и по-этому заниженную оценку расширенной неопределенности.

Кратко рассмотрим пример A1 из EURACHEM\CITAC Guide[6]. Приготовление стандартного образца для калибровки. Математическая модель измерения:

$$C_{Cd} = \frac{1000 * m * P}{V} \quad (2)$$

Причем V оценивается отдельным этапом и включает в себя три источника неопределенности. Результат вычислений классическим методом приведен в [6]: U(C_{Cd})=1.8 мг/л для p=95%

Применяя метод Монте Карло и следуя алгоритму на рис.1 моделируем 10^6 реализаций V и C_{Cd}, отсортированные значения и построенная гистограмма(для C_{Cd}) изображены на рис.4.

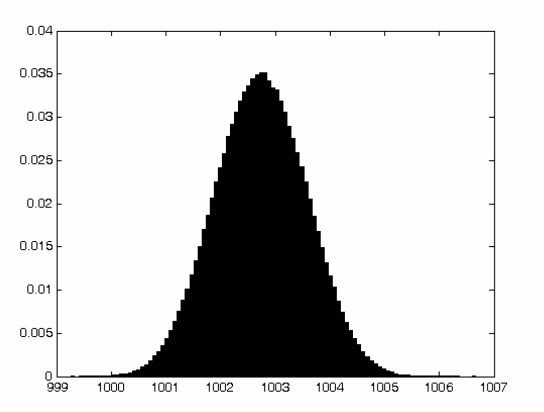

Рис.4.Гистограмма распределения C_{Cd}

Расширенная неопределенность для p=95% U(C_{Cd}) ≈1.62 мг/л. Сравнивая результаты, можно сделать вывод о завышенной оценке расширенной неопределенности(больше, чем на 10%!).

Проанализируем недостатки и приемущества численного метода вычисления неопределенности на основе метода Монте-Карло.

Недостатки:

1) Должны быть доступны эффективные генераторы псевдо-случайных чисел с длинным периодом. Любые современные математические программные пакеты содержат в себе такие генераторы;
2) Сложные модели могут забирать много вычислительного времени для M реализаций;
3) Коэффициенты чувствительности модели не доступны(но и не нужны для работы алгоритма);
4) Математическая модель должна быть численно стабильной в связи с оцениваниям не только в окрестности приписаного значения, но и на всех интервалах всех распределений входных величин. Данный недостаток можно рассматривать только если сама математическая модель измерения оценивалась численно[4].

Преимущества:

1) Доступна оценка плотности и функции распределения, а не одна статистика(такая, как стандартное отклонение). Любая необходимая статистика может быть вычислена.
2) Возможность использования для поэтапного оценивания неопределенности, где выход одной модели есть входом другой модели. На вход подается M смоделированных точек. Метод допускает любое количество таких этапов.
3) Применение для любых типов математических моделей измерений: линейных, слабо линейных и сильно нелинейных. Никакого анализа и/или преположений не надо делать о необходимом количестве членов ряда Тейлора для аппрокимации функции f.
4) Неопределенность входных величин может быть сколь угодно велика;
5) Не нужно делать никаких допущений и/или предположений о законе распределения выходной величины математической модели измерения Y. И, например, таким образом, распределения, которые не могут быть отрицательными будут достоверно оценены;
6) Нет никаких допущений о симметричености законов распределения как входных выеличин так и выхода, таким образом не нужно делать никаких допущений о симметричности либо приводить входные величины к симметрически распределенным;
7) Нет необходимости оценивать коэффициенты чувствительности, т.е. частные производные первого порядка.(Также и высших порядков для явно нелинейных моделей);
8) Нет необходимости применять принцип числа эффективных степеней свободы и формулу Вельча-Статерсвейта для их вычисления;
9) Линейная вычислительная сложность – зависит от произведения числа M и времени вычисления функции f;

Единственным существенным недостатком численного метода является вычислительная сложность для сложных моделей из-зи большого M, возможно, выбраного не оптимально. Мы на пути разработки адаптивного алгоритма выбора параметра M метода.

Массовое внедрение данного численого метода в практику лабораторий возможно с помошью специального програмного обеспечения, в котром реализован и метод Монте-Карло и алгоритм выбора параметра M[7].

В данной работе был рассмотрен численный алгоритм вычисления неопределенности измерений, основаный на методе Монте-Карло на двух практических примерах. Проанализированы недостатки и преимущества метода. Предлагается отказатся от классического метода расчета и применять только численный метод для оценивания неопределенности, что позволит исключить риск из-за неверного предположения о линейности математической модели либо о законе распределения результата измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Новиков. Вычисление расширенной неопределенности // Системи обробки інформації. – Харків. – 2007. – Вип.6(64). – с.73–с.77.

2. Guide to the expression of uncertainty in measurement(GUM), Керівництво з вираження невизначеності у вимірюваннях: Second edition, ISO, Geneva 1995.

3. Guide to expression of uncertainty in measurement.Sup.1:Numerical methods for the propagation of probability distribution, ISO,2005 Draft.

4. Cox M. et al(2001). Best Practice Guide No6. Uncertainty and statistical modeling. Technical Report, National Physical Laboratory, Teddington,UK.

5. EA. Expression of the uncertainty of measurement in calibration. Technical Report EA-4/02, European Co-operation for Accreditation, 1999.

6. EURACHEM/CITAC, Guide CG4, Quantifying uncertainty in analytical measurement, second edition, 2000.

7.http://novikov.biz.ua/ua/Services/Uncertainty.html