УДК 519.00.00

В.В. Новиков

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Как правило, на основе интервала, определенного расширенной неопределенностью результата измерения, делается вывод об оценке соответствия продукции спецификациям или стандартам. Поэтому оценивание расширенной неопределенности обязательно для многих измерений. В данной работе рассмотрено сравнение двух подходов к оцениванию расширенной неопределенности – по ISO GUM и используя метод Монте-Карло на нескольких модельных примерах. Проведен анализ результатов сравнения и целесообразность применения численных методов.

Ключевые слова: расширенная неопределенность, вычисление, метод Монте-Карло, численные методы

Для оценивания расширенной неопределенности в практике используют стандартный подход, описанный в основном документе по оцениванию неопределенности измерений ISO GUM[1]. Опишем основные шаги этого алгоритма:

1. Оценка стандартной неопределенности: $u_c(y)$;
2. Вычисления коэффициента покрытия(охвата): k.
3. Умножение стандартной неопределенности на коэффициент k: $U=k*u_c(y)$

Вычисленная таким образом величина и есть оценка расширенной неопределенности результата измерения.

Рассмотрим более детально п.2 данного алгоритма. Коэффициент покрытия зависит от двух величин – от уровня доверия: p и от закона распределения результата измерения Y (выходной величины математической модели измерения)[1]. Согласно ISO GUM, рассматривается 3 возможных закона распределения для величины Y: нормальный(гауссовский), равномерный(прямоугольный) и Стьюдента(T-распределение). В этом же документе описаны рекомендации по выбору предполагаемого закона распределения Y, которые основаны на Центральной предельной теореме теории вероятностей. Эти рекомендации основаны на анализе наибольших вкладов источников(составляющих) неопределенности и законов их распределения.

Когда выбор предполагаемого закона распределения Y сделан, то для необходимого p определяется значение коэффициента покрытия по специальным вычислительным алгоритмам либо из справочных данных. Особым случаем является выбор распределения Стьюдента – сначала необходимо вычислить число эффективных степеней свободы по соответствующей формуле, а потом для выбранного p определять значение коэффициента покрытия.

Стоит заметить, что кроме неточности, которая возникает из-за предположения о законе распределения Y, может быть еще и неточность, которая возникает при вычислении суммарной стандартной неопределенности. Такие ситуации могут возникать из-за плохой аппроксимации функции математической модели измерения рядом Тейлора с членами первого порядка.

Естественно, что истинный закон распределения является неизвестным, но было бы разумно провести его анализ и обосновать критерии выбора оценки этого закона распределения. Ведь от этого зависит оценка расширенной неопределенности, а соответственно, возможно, и решение о соответствии.

Результат измерения Y – это сложная функция от источников неопределенности(входных величин), т.е. с математической точки зрения Y – функция от разно распределенных случайных величин. Определение закона распределения Y – крайне сложная задача и решена только для простейших функций[1,2]. Аналитическое решение этой задачи возможно только для линейных функций с некоторыми ограничениями, используя свертывание функций плотности случайных величин, что бывает крайне сложно. В реальных измерительных задачах математическая модель измерения может быть нелинейная, но даже для линейной модели оценку распределения Y свертыванием случайных величин не проводят[1].

Стоит поставить вопрос о возможной неточности предположения о законе распределения Y и, как следствие, о возможной неточности вычисления оценки расширенной неопределенности.

Предлагается использовать численные методы для оценивания распределения Y и, соответственно, для оценивания расширенной неопределенности.

Рассмотрим пример стандартного оценивания расширенной неопределенности некоторого простого линейного модельного примера. Пусть:

$$f = A + B \quad (1)$$

A – нормально распределенный источник неопределенности с приписанным значением 10±0.501 ед. с вероятностью 95.45%;

B – равномерно распределенный источник неопределенности с приписанным значением 0±1 ед.(некоторый поправочный коэффициент);

Такой пример выбран для того, чтобы исключить возможную неточность вычисления оценки суммарной стандартной неопределенности и уделить внимание оценке расширенной неопределенности

Используя стандартный метод расчета, получим оценку суммарной стандартной неопределенности: $u_c(y)$= 0,629. Вклады источников неопределенности в суммарную стандартную неопределенность составляют: вклад B – 69.74%, вклад A – 30.26%. Для всех расчетов используем специальное программное обеспечение[3].

Расширенная неопределенность вычисляется из предположения о нормальности y: U(y)=1,233,p=95%(согласно [1]).

Промоделируем данную задачу, учитывая законы распределения и характеристики источников неопределенности, используя метод Монте-Карло. Для моделирования каждой случайной величины используем стандартные генераторы псевдослучайных чисел, описанные в [4].

Для каждого источника неопределенности генерируется 100 тыс. реализаций(период генераторов значительно больше 100 тыс.). Каждая отдельная реализация вычисляется согласно модели измерения (1); в результате получено 100 тыс. смоделированных реализаций Y. Относительная ошибка моделирования – 0.06%.

Проверим, какой процент смоделированных реализаций(т.е. смоделированного распределения) попал в интервал 10±1,233 ед.: 97.6 %. Учитывая ошибку моделирования, можно сделать вывод, что интервал, определенный стандартным методом шире, чем необходимо. Смоделированная оценка расширенной неопределенности для p=95% составляет: 1.125 ед., т.е. разница оценок составляет: 0.108 ед., либо 9.6%. Для многих практических задач это разница может быть существенна. С уровнем доверия 99% разница еще больше и составляет почти 25%. Полное сравнение результатов стандартного вычисления и моделированного вычисления приведены в таблице1.

Если же сделать предположение о равномерном законе распределения Y, то мы получим оценку расширенной неопределенности, что также будет существенно отличатся от смоделированного, но все же будет ближе, чем предполагая нормальный(см. табл.1).

Выбор распределения Стьюдента(если предположить, что известны степени свободы A и B) приведет к еще более завышенной оценке расширенной неопределенности, поскольку коэффициент покрытия всегда будет больше, чем в случае выбора нормального закона распределения.

Таблица 1

Таблица сравнения

Хар-ка	Стандарт. метод	Монте-Карло	Абс. разница	Отн. разница
U, p=95%	1.233 ед. (k=1.96)	1.125 ед.	0.108 ед.	9.6%
U, p=95%	1.037 ед. (k=1.65)	1.125 ед.	0.088 ед.	7.8%
U, p=99%	1.623 ед. (k=2.58)	1.335 ед.	0.288 ед.	21.6%
U, p=99%	1.076 ед. (k=1.71)	1.335 ед.	0.259 ед.	19.4%

Из анализа таблицы 1 можно сделать вывод, что смоделированное значение расширенной неопределенности лежит между оценками расширенной неопределенности, вычисленной исходя из нормальности(завышенная оценка) и исходя из равномерности(заниженная оценка) закона распределения результата. Это можно объяснить из-за «хвостов» распределения Y, которые нельзя «обрубить»(предположение о равномерности), но все же они меньше «хвостов» нормального закона.

Видимо, в данном случае, некорректно использовать стандартный метод вычисления расширенной неопределенности для данного модельного примера, который может встречаться на практике. Особенное внимание к вычислению расширенной неопределенности стоит уделить там, где требуется высокая точность оценки, например при оценивании неопределенности приписанных величин эталонов[5]. Стоит заметить, что для некоторых измерений и приложений, вычисленная разница оценок может является не существенной. Для таких случаев можно делать вывод о нормальности Y, так как это даст точно не заниженную оценку расширенной неопределенности, что крайне важно при исследовании показателей безопасности.

Рассмотрим еще один пример стандартного оценивания расширенной неопределенности – пример А5 «Высвобождение кадмия из керамической посуды» документа [6], т.к. подобная методика может быть использована для испытания керамической и стеклянной посуды на показатели безопасности в странах СНГ.

Математическая модель измерения достаточно сложна и нелинейная

$$r = \frac{C_0 V facid ftime ftemp}{av} \quad (2)$$

Источники неопределенности и их характеристики описаны в [6]:

Co - Содержание кадмия в растворе;

Vl - Объем раствора;

av - Площадь поверхности посуды;

facid - Коэффициент влияния концентрации кислоты;

ftime - Коэффициент влияния времени;

ftemp - Коэффициент влияния температуры;

r - Масса кадмия на единицу площади.

Модель (2) явно нелинейная, но неточность вычисления суммарной стандартной неопределенности в данном случае будет крайне мала. Учитывая количество, законы и вклады источников неопределенности, для данного примера «лучше выполняются» условия Центральной предельной теоремы и стоит ожидать, что оценка расширенной неопределенности будет ближе к моделированному значению.

Используя стандартный метод расчета расширенной неопределенности для уровня доверия p=95% и предполагая нормальное распределение результата измерения, было получено r=0.036±0.007 мг/дм^2 Было сделано округление до значащего знака(полученное значение - 0.0068). Полный расчет приведен в [6].

Аналогичным образом промоделируем данную задачу, учитывая законы распределения и характеристики источников неопределенности, используя метод Монте-Карло. В результате получим 100 тыс. смоделированных реализаций Y. Относительная ошибка моделирования – 0.08%.

Смоделированная оценка расширенной неопределенности для p=95% составляет 0.0064 мг/дм^2, т.е. разница оценок(без округления) составляет: 0.0004 мг/дм^2, либо 6.25%.

Как и в предыдущем примере, получена завышенная оценка расширенной неопределенности, исходя из нормального распределения. Это означает, что «хвосты» закона распределения r меньше чем у нормального закона.

В данном случае, полученная разница даже меньше значащей цифры, поэтому разницу можно считать не существенной. Для данной математической модели измерения можно обоснованно делать допущения о нормальности результата измерения для вычисления расширенной неопределенности с необходимой точностью для уровня доверия 95% и пользоваться стандартным методом расчета. В [2,5] можно найти рекомендации проводить все расчеты только на основе численных методов, но полученная точность бывает не везде необходима и уместна. Кроме того, использование численных методов для расчета неопределенности подразумевает использование специального программного обеспечения или математических программных пакетов.

Выводы: В данной работе приведены результаты сравнения и анализа стандартного расчета оценки расширенной неопределенности и смоделированной по методу Монте-Карло оценки расширенной неопределенности двух модельных примеров. Используя численные методы, можно обосновать выбор соответствующего стандартного распределения для оценки расширенной неопределенности. Для некоторых случаев может быть не приемлемо использовать стандартные распределения, тогда для расчета расширенной неопределенности необходимо пользоваться только численными методами(и учитывать неточность моделирования).

ЛИТЕРАТУРА

1. Guide to the expression of uncertainty in measurement(GUM), Керівництво з вираження невизначеності у вимірюваннях: Second edition, ISO, Geneva 1995.

2. Guide to expression of uncertainty in measurement.Sup.1:Numerical methods for the propagation of probability distribution, ISO,2005 Draft.

3. В.В. Новіков, А.М.Коцюба. Автоматизація процесу обчислення оцінок невизначеності вимірювань // Системи обробки інформації. – Харків. – 2006. – Вип.7(56). – с.59–с.61.

4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1982. – 296 с.

5. Walter Bich, Maurice G Cox,Peter M Harris Evolution of the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’, Metrologia, 43 (2006) S161–S166, UK-2006

6. EURACHEM/CITAC, Guide CG4, Quantifying uncertainty in analytical measurement, second edition, 2000